弱準縮小写像の不動点定理と完備距離空間の特徴付け (非線形解析学と凸解析学の研究)

家本, 繁

数理解析研究所講究録
第 1685 巻 2010 年 59-66

弱準縮小写像の不動点定理と完備距離空間の特徴付け
Fixed point theorems for weakly quasi-contractive mappings and metric completeness

慶應義塾大学・商学部 家本 繁 (Shigeru IEMOTO)
Faculty of Business and Commerce
Keio University

1 序論

文献 [3] を元に, 本稿では quasi-contractive 写像と weakly quasi-contractive 写像を定義してその不動点の存在について議論する. そして quasi-contractive 写像による完備性の特徴付けについて述べる.

まず [3] の研究の動機について述べる. 本節の残りで用いる写像等の定義については次節で述べるのでここでは省略する. 完備距離空間 X において contractive 写像が唯一の不動点をもつことは, Banach [1] によって証明され, 微分方程式の解の存在等において重要な役割を果たしてきた. contractive 写像が連続写像であることはよく知られているが, この写像の不動点性, すなわち不動点の存在によって距離空間の完備性をうまく特徴付けられないこともわかっている.

一方, contractive 写像と同様に古くから研究されてきた写像に Kannan 写像 [5] がある. この写像も contractive 写像と同様に完備距離空間上で常に唯一の不動点をもつが, 一般に Kannan 写像は連続とは限らない. その例については第 3 節で述べるが, Kannan 写像の不動点性が距離空間の完備性を特徴付けていることが Subrahmanyam [7] や塩路-鈴木-高橋 [6] によって証明されている. さらに, 鈴木-高橋 [8] は距離の概念を弱めた弱距離を用いて contractive 写像を一般化し, その写像の不動点性をもって完備性の特徴付けに成功している. 弱距離を用いて contractive 写像や Kannan 写像を一般化した場合, ある性質を満たすこれらの写像族が実は一致することも示されている [6].

そこで [3] では, Kannan 写像と同じく不連続な写像である quasi-contractive 写像 [2] に焦点をあて, 不動点の存在と完備性の特徴付けの研究を行った. さらに弱距離を用いて一般化した weakly quasi-contractive 写像を定義し, その不動点の存在や他の写像族との関連について

も調べた. [3] の結果について, 本稿ではその概要をまとめる.

本稿は全部で 5 節から成る. 第 2 節は第 3 節以降の準備と, 本節で述べた写像等の定義をまとめている. 第 3 節は文献 [3] にはない内容だが, その理解のためにいくつかの例を載せている. 第 4, 5 節は文献 [3] の主結果を抜粋し, まとめている.

2 準備

X を距離空間とし, $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ でそれぞれ自然数, 実数全体の集合を表す. さらに, X 上で定義された写像 T に対して, $T(X)$ でその値域を表すことにする.

まず以降で用いる写像をいくつか定義する. T を X から X への写像とする. このとき, 写像 T が **contractive** [1,10] であるとは, $r \in [0,1)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$$

が成り立つときをいう. 写像 T が **Kannan** [5,10] であるとは, $\alpha \in [0, 1/2)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha(d(Tx, x) + d(Ty, y))$$

が成り立つときをいう. 写像 T が **quasi-contractive** [2,3] であるとは, $\alpha \in [0, 1/2)$ が存在して

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha(d(Tx, y) + d(Ty, x))$$

が任意の $x, y \in X$ で成り立つときをいう. 写像 T の不動点集合を $F(T)$ で表す, すなわち $F(T) = \{z \in X : Tz = z\}$.

次に, 加田-鈴木-高橋 [4] によって定義された弱距離について述べる. ここでは弱距離について複数の文献を引用しながら説明する. ただし, ここで引用する結果が非常によくまとめられた文献に高橋 [10] があることを付記しておく. いま, 関数 $p : X \times X \to [0, \infty)$ が**弱距離**であるとは, 次の (W1)–(W3) が満たされるときをいう.

(W1) 任意の $x, y, z \in X$ に対して,

$$p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z).$$

(W2) 任意の $x \in X$ に対して, $p(x, \cdot) : X \to [0, \infty)$ が下半連続である.

(W3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して $p(z, x) \leq \delta$, $p(z, y) \leq \delta$ ならば $d(x, y) \leq \varepsilon$.

一般の距離が弱距離になっていることは明らかである. それ以外の弱距離の例については, 加田-鈴木-高橋 [4], 高橋 [4, 9, 10] 等を参照のこと. いま, X 上の弱距離全体の集合を $W(X)$ で表すことにする. $p \in W(X)$ が**対称的** [6,10] であるとは, 任意の $x, y \in X$ に対し

て $p(x,y)=p(y,x)$ となるときをいい, 対称的な弱距離全体の集合を $W_0(X)$ で表す. また, $p\in W(X)$ が**正規** [3] であるとは, $x=y$ ならば $p(x,y)=0$ となるときをいい, 正規な弱距離全体の集合を $W_*(X)$ で表す. 正規な弱距離の例については, 次節を参照されたい.

次に, 弱距離を用いて塩路-鈴木-高橋 [6] によって定義されたいくつかの写像をまとめる. これらは 4 節の不動点定理を示す上で重要である. まず contractive 型の写像について述べる.

$T\in WC_0(X) \iff p\in W_0(X)$, $r\in[0,1)$ が存在して, 任意の $x,y\in X$ に対して $p(Tx,Ty)\le rp(x,y)$.

$T\in WC_1(X) \iff p\in W(X)$, $r\in[0,1)$ が存在して, 任意の $x,y\in X$ に対して $p(Tx,Ty)\le rp(x,y)$.

$T\in WC_2(X) \iff p\in W(X)$, $r\in[0,1)$ が存在して, 任意の $x,y\in X$ に対して $p(Tx,Ty)\le rp(y,x)$.

特に, 写像 $T\in WC_1(X)$ を **weakly contractive** 写像と呼ぶ. 同様にして, Kannan 型の写像についても次のように定義される.

$T\in WK_0(X) \iff p\in W_0(X)$, $\alpha\in[0,1/2)$ が存在して, 任意の $x,y\in X$ に対して $p(Tx,Ty)\le\alpha(p(Tx,x)+p(Ty,y))$.

$T\in WK_1(X) \iff p\in W(X)$, $\alpha\in[0,1/2)$ が存在して, 任意の $x,y\in X$ に対して $p(Tx,Ty)\le\alpha(p(Tx,x)+p(Ty,y))$.

$T\in WK_2(X) \iff p\in W(X)$, $\alpha\in[0,1/2)$ が存在して, 任意の $x,y\in X$ に対して $p(Tx,Ty)\le\alpha(p(Tx,x)+p(y,Ty))$.

特に, 写像 $T\in WK_1(X)$ を **weakly Kannan** 写像と呼ぶ. 次の補題は, これらの写像の関連性を調べる上で非常に重要な結果である.

補題 2.1 ([6]). X を距離空間とし, $p\in W(X)$, T を X から X への写像とする. $u\in X$ を

$$\lim_{m,n\to\infty} p(T^m u, T^n u)=0$$

を満たすようにとる. このとき, 任意の $x\in X$ に対して $\lim_{k\to\infty}p(T^k u,x)$, $\lim_{k\to\infty}p(x,T^k u)$ が存在する. さらに, 関数 $q_0,q_1: X\times X\to[0,\infty)$ を

$$q_0(x,y)=\beta(x)+\beta(y),\ q_1(x,y)=\gamma(x)+\beta(y)$$

で定義する. ここで, 関数 $\beta,\gamma: X\to[0,\infty)$ は

$$\beta(x)=\lim_{k\to\infty}p(T^k u,x),\ \gamma(x)=\lim_{k\to\infty}p(x,T^k u).$$

このとき, 関数 $q_0,q_1: X\times X\to[0,\infty)$ は弱距離になる.

補題 2.1 において, 関数 $q_0: X\times X\to[0,\infty)$ は明らかに対称な弱距離となっている, すなわち $q_0\in W_0(X)$ である. 補題 2.1 を用いて, 上で定義した写像族について以下の定理を示すことができる.

定理 2.1 ([6]). X を距離空間とする．このとき,

$$WC_0(X) = WC_1(X) = WK_0(X) = WK_1(X) \subset WC_2(X) = WK_2(X).$$

また, 加田-鈴木-高橋 [4] は weakly contractive 写像について次の定理を証明している．

定理 2.2 ([4]). X を完備距離空間とし, 写像 $T : X \to X$ を weakly contractive 写像とする．このとき, 写像 $T : X \to X$ は X 上に唯一の不動点をもつ．

この定理の逆の命題に肯定的な解答を与えたのが, 鈴木-高橋 [8] による次の定理である．

定理 2.3 ([8]). X を距離空間とする．このとき, 以下は同値である．

(1) X は完備である．

(2) X から X へのすべての weakly contractive 写像は X 上に不動点をもつ．

最後に mean の定義について述べて, この節の結びとする．S を空でない集合として, $B(S)$ を S 上の有界実数値関数全体のつくるバナッハ空間とする．ただし, $B(S)$ には sup ノルムが入っている．X を $B(S)$ の部分空間で, 恒等的に 1 となる関数 e を含むものとする．このとき, X 上の線形汎関数 μ が **mean** であるとは

$$\|\mu\| = \mu(e) = 1$$

を満たすときをいう．mean については, 次の性質が知られている．

定理 2.4 ([10]). X を定数を含む $B(S)$ の部分空間とし, μ を X 上の線形汎関数とする．このとき, 以下は同値である．

(1) μ は X 上の mean.

(2) 任意の $f \in X$ に対して,

$$\inf_{s\in S} f(s) \leq \mu(f) \leq \sup_{s\in S} f(s).$$

3 Kannan 写像, quasi-contractive 写像および正規な弱距離の例

第 1 節の導入において Kannan 写像, quasi-contractive 写像が一般には連続でないことに言及した．ここでは, その例について述べる．また, 第 2 節で正規な弱距離を新しく導入したが, そのような弱距離の例についてもここで述べる．ただしこの節は本稿の主流から外れる内容であり, 必要に応じて読み飛ばしていただいて構わない．

まず連続でない Kannan 写像の例は以下の通り．

例 1 ([5]). $X=[0,1]$ とし, 写像 $T:X\to X$ を

$$Tx=\begin{cases} x/4 & (x\in[0,1/2)),\\ x/5 & (x\in[1/2,1]) \end{cases}$$

で定義する. このとき, 写像 $T:X\to X$ は Kannan である.

連続でない quasi-contractive 写像もこの例を参考にして作ることができる.

例 2. $X=[0,1]$ とし, 写像 $T:X\to X$ を

$$Tx=\begin{cases} x/2 & (x\in[0,1/2)),\\ 0 & (x\in[1/2,1]) \end{cases}$$

で定義する. このとき, 写像 $T:X\to X$ は quasi-contractive である.

最後に前節で新しく導入した正規な弱距離の例を示す. 証明は加田-鈴木-高橋 [4] の Example 5, 高橋 [10] の Example 2.2.4 と同様に示すことができるので, ここでは簡単に証明の概略を述べるに留める.

例 3. (X,d) を距離空間とし, T を X から X への連続写像とする. このとき, 関数 $p:X\times X\to[0,\infty)$ を

$$p(x,y)=\max\{d(x,y),d(Tx,Ty)\}\ (x,y\in X)$$

で定義すると, p は正規な弱距離になる.

証明. 関数 p が弱距離であることを示せば, 関数 p が正規であることは明らかである. $x,y,z\in X$ とする.

(W1) $d(x,z)\geq d(Tx,Tz)$ のとき,

$$\begin{aligned} p(x,z)&=d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)\\ &\leq\max\{d(x,y),d(Tx,Ty)\}+\max\{d(y,z),d(Ty,Tz)\}\\ &=p(x,y)+p(y,z). \end{aligned}$$

$d(x,z)\leq d(Tx,Tz)$ のとき,

$$\begin{aligned} p(x,z)&=d(Tx,Tz)\leq d(Tx,Ty)+d(Ty,Tz)\\ &\leq\max\{d(x,y),d(Tx,Ty)\}+\max\{d(y,z),d(Ty,Tz)\}\\ &=p(x,y)+p(y,z). \end{aligned}$$

(W2) は明らか.

(W3) 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\delta=\varepsilon/2$ とする. このとき, $p(z,x)\leq\delta$, $p(z,y)\leq\delta$ ならば $d(z,x)\leq\delta$, $d(z,y)\leq\delta$ である. よって,

$$d(x,y)\leq d(z,x)+d(z,y)\leq 2\delta=\varepsilon.$$

以上より, 関数 p は正規な弱距離である. □

4 quasi-contractive 写像の不動点定理

X を距離空間とする. ここで, 新しく以下の写像を定義する. T を X から X への写像とする. $T \in WS_{1*}(X)$ であるとは, $p \in W_*(X)$ と $\alpha \in [0, 1/2)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$p(Tx, Ty) \leq \alpha(p(Tx, y) + p(Ty, x))$$

が成り立つときをいう. また $T \in WS_{2*}(X)$ であるとは, $p \in W_*(X)$ と $\alpha \in [0, 1/2)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$p(Tx, Ty) \leq \alpha(p(Tx, y) + p(x, Ty))$$

が成り立つときをいう. 写像 $T : X \to X$ が **weakly quasi-contractive** [3] であるとは, $T \in WS_{1*}$ もしくは $T \in WS_{2*}$ であるときをいう.

ここで定義した $WS_{1*}(X), WS_{2*}(X)$ と $WC_0(X), WC_1(X)$ 等の関係について, 補題 2.1 と定理 2.1 を用いて次の補題が示せる.

補題 4.1 ([3]). X を距離空間とする. このとき,

$$WS_{1*}(X), WS_{2*}(X) \subset WC_0(X) = WC_1(X).$$

補題 4.1 と定理 2.2 より以下の定理が得られる.

定理 4.1 ([3]). X を完備距離空間とし, 写像 $T : X \to X$ を weakly quasi-contractive 写像とする. このとき, 写像 $T : X \to X$ は X 上に唯一の不動点をもつ.

これと先行研究を合わせると, この節の主結果である次の定理を得ることができる. [12] も参照のこと.

定理 4.2 ([3]). X を完備距離空間とし, 写像 $T : X \to X$ は次の条件のうちの一つを満たすものとする:

(1) T は weakly contractive 写像.
(2) T は weakly Kannan 写像.
(3) T は weakly quasi-contractive 写像.

このとき, 写像 T は X 上に唯一の不動点をもつ.

この定理が示すように, contractive, Kannan, quasi-contractive 写像を弱距離を用いて一般化した一連の不動点定理を得ることができたことになる. しかしながら

- 補題 4.1 の逆の包含関係の真偽
- weakly quasi-contractive 写像の定義の中で用いる正規な弱距離の条件を一般の弱距離に弱めた場合の定理 4.1 の真偽

は, わかっていない.

5 quasi-contractive 写像による完備性の特徴付け

この節では, quasi-contractive 写像の不動点性による距離空間の完備性について述べる. まず, contractive 写像に関する以下の例から始める.

例 4 ([8]). $\mathbb{R}^2$ で以下の集合を定義する.

$$A_n = \left\{ \left(t, \frac{t}{n} \right) : t \in (0,1] \right\},\ X = A_n \cup \{0\}.$$

このとき X は完備ではなく, X 上の任意の連続写像は不動点をもつ.

contractive 写像の連続性から, この例は contractive 写像が不動点性をもっていても空間が完備ではない場合があることを意味している.

一方, Subrahmanyam [7] は Kannan 写像について次の定理を証明している.

定理 5.1 ([7]). (X,d) を距離空間とする. 写像 $T : X \to X$ は次の条件を満たす写像である. すなわち, $\lambda \in [0,\infty)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(Tx,Ty) \leq \lambda \max\{d(Tx,x), d(Ty,y)\} \tag{1}$$

であり, $T(X)$ は可算集合である. このとき, (1) を満たす写像 T が X 上で不動点をもつならば, X は完備である.

Kannan 写像は定理 5.1 の条件 (1) を満たしている. そのため, Kannan 写像の不動点性を用いて距離空間の完備性を特徴付けることができる.

一方, contractive 写像の不動点性によって距離空間の完備性を特徴付けることはできないが, 鈴木-高橋 [8] は第 2 節で定義した contractive 写像の一般化である weakly contractive 写像を用いて, 以下の定理を証明した.

定理 5.2 ([8]). X を距離空間とする. このとき, 以下は同値である.

(1) X は完備である.
(2) X から X へのすべての weakly contractive 写像は X 上に不動点をもつ.

定理 5.1 とは対照的に, 塩路-鈴木-高橋 [6] は Kannan 写像の不動点性による完備性の特徴付けに mean を用いて, 次の定理を証明した.

定理 5.3 ([6]). (X,d) を距離空間とする. このとき, 以下は同値である.

(1) X は完備である.
(2) X から X へのすべての Kannan 写像は X 上に不動点をもつ.
(3) 任意の有界点列 $\{x_n\} \subset X$ と $\inf_{x \in X} \mu_n d(x_n, x) = 0$ となる $\mathbb{N}$ 上の mean に対して, $\mu_n d(x_n, x_0) = 0$ となる $x_0 \in X$ が存在する.

これらを動機として, Iemoto-Takahashi-Yingtaweesittikul [3] は quasi-contractive 写像の不動点性を用いて, 次の定理を証明した.

定理 5.4 ([3]). X を距離空間とする. このとき, 以下は同値である.

(1) X は完備である.
(2) X から X へのすべての quasi-contractive 写像は X 上に不動点をもつ.

証明は [3] に譲るが, (2)⇒(1) において対偶命題, すなわち X が完備でないならば不動点をもたない quasi-contractive 写像 $T : X \to X$ が存在することを示している. この手法は, 同様の性質をもつ Kannan 写像を構成する際にも有用なものである.

参考文献

[1] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications*, Fund. Math. **3** (1922), 133–181.
[2] S. K. Chatterjea, *Fixed-point theorems*, C. R. Acad. Bulgare Sci. **25** (1972), 727–730.
[3] S. Iemoto, W. Takahashi, and H. Yingtaweesittikul, *Nonlinear operators, fixed points and completeness of metric spaces*, submitted.
[4] O. Kada, T. Suzuki, and W. Takahashi, *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*, Math. Japon. **44** (1996), 381–391.
[5] R. Kannan, *Some results on fixed points. II*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), 405–408.
[6] N. Shioji, T. Suzuki, and W. Takahashi, *Contractive mappings, Kannan mappings and metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3117–3124.
[7] P. V. Subrahmanyam, *Completeness and fixed-points*, Monatsh. Math. **80** (1975), 325–330.
[8] T. Suzuki and W. Takahashi, *Fixed point theorems and characterizations of metric completeness*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **8** (1996), 371–382.
[9] W. Takahashi, *Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings*, Fixed point theory and applications (Marseille, 1989), Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 252, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991, pp. 397–406 (English, with French summary).
[10] ———, *Nonlinear Functional Analysis -Fixed Point Theory and its Applications*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
[11] ———, *Introduction to Nonlinear and Convex Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.
[12] T. Zamfirescu, *Fix point theorems in metric spaces*, Arch. Math. (Basel) **23** (1972), 292–298.